АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ PDESOLVE В MATHCAD

Эргашев М.
преподаватель кафедры математики и информационных технологий Ориенталного университета

Аннотация:
В данной статье рассматривается задача численного решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности с использованием встроенной функции pdesolve в среде Mathcad. Приведено пошаговое описание постановки задачи, граничных и начальных условий, а также объяснены особенности применения метода разделения переменных. Основное внимание уделено анализу устойчивости численного решения при различных параметрах расчетной сетки, числе дискретизации по времени и пространству, а также конфигурации граничных условий. Приведены примеры практического применения функции pdesolve, пояснены требования к корректной формулировке расчетной задачи в вычислительном блоке Mathcad. Полученные результаты свидетельствуют о способности функции эффективно справляться с задачами теплопроводности в простых случаях и выявляют ее ограничения при усложнении модели.

Ключевые слова: теплопроводность, уравнение в частных производных, Mathcad, pdesolve, устойчивость, численное решение, граничные условия, метод разделения переменных

ANALYSIS OF THE STABILITY OF HEAT CONDUCTION EQUATION SOLUTIONS USING THE PDESOLVE FUNCTION IN MATHCAD

Ergashev M.
Teacher at the Department of Mathematics and Information Technologies, Oriental University

Abstract:
This paper explores the numerical solution of the one-dimensional unsteady heat conduction equation using the built-in pdesolve function in Mathcad. The study presents a step-by-step formulation of the partial differential equation along with boundary and initial conditions, followed by a detailed explanation of the variable separation method. The main focus is placed on analyzing the stability of numerical solutions under various combinations of mesh

parameters, spatial and temporal discretization points, and boundary condition configurations. Practical examples of pdesolve implementation are provided, along with requirements for correct usage within Mathcad's computation block. The findings show that while the function is capable of handling basic heat conduction problems effectively, it has certain limitations when applied to more complex models.

Keywords: heat conduction, partial differential equation, Mathcad, pdesolve, stability, numerical solution, boundary conditions, variable separation method

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных представляют собой одну из наиболее сложных и одновременно интересных задач вычислительной гидромеханики и теплообмена, требуя нахождения функций нескольких переменных. Постановка задачи включает в себя само уравнение (или систему уравнений), содержащее производные неизвестной функции по различным переменным (частные производные), а также определённое количество граничных условий на границах расчётной области[1]. В данной работе определяется нестационарное поле температуры в одномерном твёрдом теле с коэффициентом теплопроводности D, если начальная температура тела равна нулю (или T_1=0), а в последующие моменты времени температура левой границы остаётся равной нулю (T_1), а температура правой границы поддерживается равной T_0 (рис. 1).

T = 0 T = T_0

|←--------------→| |←--------------→|

x = 0 x = L

Рис. 1. Схема задания граничных условий для решения уравнения теплопроводности.

Методы. Процесс распространения тепла в одномерном случае описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае решение должно удовлетворяя граничные условия

$$T(0,t) = 0, \quad (\text{или } T(0,t) = T_1) \qquad (2)$$

и начальное условие

$$T(x,0) = 0, \quad (\textit{или } T(x,0) = T_2) \qquad (3)$$

Уравнение (1) с условиями (2) и (3) можно решать введением новой переменной и методом разделения переменных. В результате получим:

$$T = T_0 \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4)$$

Это решение требует приближённо вычисление в каждой точке x бесконечной суммы заданной точносью. Для решения поставленной задачи мы использовали Mathcad[2]. Хотя Mathcad обладает довольно ограниченными возможностями по отношению к уравнениям в частных производных, он позволяет решать лишь их в сравнительно неболшие классаы.

В Mathcad для решения линейного одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \Phi(x,t) \quad (5)$$

используется встроенная функция **pdesolve**[3]. Встроенная функция **g**предназначена для решения уравнений в частных производных и применяется в рамках вычислительного блока, начинающегося ключевым словом **Given**. Она пригодна для решения различных гиперболических и параболических уравнений (или системы уравнений), зависящих от времени, и от пространственной координати x. Функция **pdesolve** имеет целый набор различных аргументов и работает следующим образом[4].

pdesolve(u, x, xrange, t, trange, [xpts], [tpts]) — возвращает

скалярную (для единственного исходного уравнения) или векторную (для системы уравнений) функцию двух аргументов (x, t), являюшься с решением дифференциального уравнения (или системы уравнений) в частных производных. Результирующая функция получается интерполяцией сеточной функции, вычисляемой согласно разностной, схеме, где:

- u – явно заданный вектор имён функций(без указания имён аргументов), подлежащих вычислению.

Эти функции, а также граничные условия (в форме Дирихле или Неймана) должны быть определены пользователем перед применением функции **pdesolve** в вычислительном блоке после ключевого слова **Given**. Если решается не система уравнений в частных производных, а единственное уравнение, то соответственно вектор **u** содержит только одно имя функции и выражается в скаляр;

- **x** — второй параметр, пространственная координата (имя аргумента);
- **xrange —** пространстиенный интервал, т. е. вектор значений аргумента x для граничых условий. Этот вектор должен состоять из двух действительных чисел (представляющих левую и правую границу расчетного интервала);
- **t** — время (имя аргумента независимой функции);

- **trange** — расчётная временная область: вектор значений аргумента **t**, который должен состоять из двух действительных чисел (представляющих начальную и правую границу расчётного интервала по времени);
- **xpts** — количество пространственных точек дискретизации (может не указываться явно, в таком случае будет подобрано самой программой автоматически);
- **tpts** — количество временных слоёв, т.е. интервалов дискретизации по времени (также может не указываться пользователем явно).

Для корректного использования функции **(** предварительно, после ключевого слова **Given,** следует записать само уравнение и граничные условия при помощи логических операторов (для их ввода в Mathcad существует специальная панель)[5].

В уравнение должно содержать имя искомой функции $u(x,t)$ вместе с именами аргументов (а не так, как она записывается в пределах встроенной функции **pdesolve**). Для идентификации частных производных в пределах вычислительного блока следует использовать нижние индексы, например,

$$u_{xx}(x, t)$$

для обозначения второй производной функции u по пространственнойи координате x. Один вариант использования функции **pdesolve** для решения линейного одномерного уравнения теплопроводности приведён на следующем листинге:

$$D := 0{,}1$$
$$L := 1$$
$$T := 10$$
$$Given$$
$$u_t(x,t) = D \cdot u_{xx}(x,t)$$
$$u(x,0) = \Phi(x - 0.45) - \Phi(x - 0.55)$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$
$$u := Pdesolve\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 10\right]$$

Выводы и предложения.Проблема устойчивости является краеугольным камнем алгоритмов решения уравнений в частных производных.

В данной работе приводятся результаты исследования при различных комбинациях параметров, главным образом, числа расчетних узлов сетки, граничных и начальных условий, а также в каких, случаях алгоритм встроенной функции справляется с задачей, выдавая верное решение.

Использованная литература:

1. Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics (10th ed.). Wiley.
2. Smith, G. D. (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press.
3. Mathcad Help Documentation (PTC, 2023). https://support.ptc.com/help/mathcad
4. Strikwerda, J. C. (2004). Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2nd ed.). SIAM.
5. Thomas, J. W. (1995). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Springer.